

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

—o0o—

MẠC ANH VĂN

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA MA TRẬN VÀ ÁP  
DỤNG VÀO ĐỒ THỊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, 10/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

—o0o—

MẠC ANH VĂN

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA MA TRẬN VÀ ÁP  
DỤNG VÀO ĐỒ THỊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 8460113

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC  
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Thái Nguyên, 10/2018

# Mục lục

Lời cảm ơn	iii
Mở đầu	1
<b>1 Kiến thức chuẩn bị</b>	<b>3</b>
1.1 Khái niệm của đồ thị và phổ của đồ thị . . . . .	3
1.1.1 Khái niệm đồ thị . . . . .	3
1.1.2 Phổ của đồ thị . . . . .	6
1.2 Ma trận kề. Ma trận trọng số . . . . .	10
1.3 Ma trận liên thuộc . . . . .	13
<b>2 Tính chất của ma trận biểu diễn đồ thị và các phép toán đồ thị</b>	<b>14</b>
2.1 Tính chất của ma trận biểu diễn đồ thị . . . . .	14
2.1.1 Ma trận Laplace của đồ thị và một số tính chất cơ bản .	14
2.1.2 Ma trận Laplace của một cạnh . . . . .	17
2.1.3 Phân tích ma trận Laplace . . . . .	19
2.1.4 Định lý Kirchhoff . . . . .	20
2.2 Các phép toán đồ thị . . . . .	26
<b>3 Áp dụng một số tính chất của ma trận vào đồ thị</b>	<b>32</b>
3.1 Ứng dụng định lý Kirchhoff tìm số cây bao trùm của đồ thị . . .	32
3.2 Ứng dụng trong đếm số đồ thị con . . . . .	33
3.3 Ứng dụng xác định bậc chính quy và tính hai phần . . . . .	36
Kết luận	41
Tài liệu tham khảo	42

# Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt

- $G$ : Đồ thị  $n$  đỉnh,  $m$  cạnh.
- $A$ : Ma trận kề  $n \times n$  của  $G$  có đường chéo chính bằng 0.
- $L = D - A$ : Ma trận Laplace của  $G$ .
- $B$ : Ma trận liên thuộc  $n \times m$ .  $L = B^T B$ .
- $C_{kk}$ : Là phần bù đại số của phần tử thứ  $k$  của đường chéo chính của ma trận vuông  $L$ .
- $[L]_{k,k}$ : Là định thức con chính thứ  $k$  của ma trận vuông  $L$ .

## Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu. Thầy đã hướng dẫn và tạo điều kiện tốt nhất để cho tác giả hoàn thành luận văn này. Nhân dịp này, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới thầy.

Tác giả cũng được xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy các lớp cao học Toán K10Q, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, khoa Toán - Tin đã tạo điều kiện thuận lợi nhất cho tác giả trong suốt quá trình học tập tại trường.

Cuối cùng, tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới tập thể lớp cao học toán K10Q, gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã giúp đỡ, động viên và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả khi học tập và nghiên cứu.

Mặc dù bản thân đã có nhiều cố gắng nhưng do điều kiện thời gian ngắn, trình độ và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học còn hạn chế, nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những đóng góp của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để tác giả có thể tiếp tục nghiên cứu tốt hơn.

*Thái Nguyên, tháng 10 năm 2018*

Người viết luận văn

Mạc Anh Văn

# Mở đầu

Lý thuyết đồ thị là một lĩnh vực nghiên cứu đã hình thành và phát triển từ khá lâu nhưng lại có nhiều ứng dụng hiện đại. Những tư tưởng cơ bản của lý thuyết đồ thị đã xuất hiện từ những năm 30 của thế kỷ XVIII bởi nhà toán học lỗi lạc người Thụy Sĩ Leonhard Euler. Chính ông là người đã đề xuất mô hình đồ thị và sử dụng nó để giải bài toán nổi tiếng về cây cầu ở thành phố Königsberg. Từ đó, lý thuyết đồ thị ngày càng khẳng định được vị trí quan trọng trong việc áp dụng để giải quyết nhiều bài toán trên mọi lĩnh vực.

Đồ thị mô tả các quan hệ hai ngôi trên tập hợp một cách trực quan sinh động: giúp chúng ta mô tả các bài toán phức tạp trở lên cụ thể, đơn giản hơn. Sơ đồ biểu diễn một hệ thống các tuyến bay của một hãng hàng không là một hình ảnh của đồ thị. Các đối tượng là các sân bay, mỗi đường bay thẳng sẽ biểu diễn mối liên hệ giữa 2 sân bay đầu cuối của tuyến.

Các tính chất của đồ thị có thể được biểu diễn bằng ngôn ngữ đại số tuyến tính và những kết quả của đại số tuyến tính sẽ được thể hiện trực quan bằng đồ thị. Ma trận là một khái niệm của Đại số tuyến tính. Ma trận có ứng dụng trong hầu hết các lĩnh vực khoa học. Ma trận có vai trò khá quan trọng trong lý thuyết đồ thị. Có thể nói ma trận là một công cụ kết nối giữa lý thuyết đồ thị và đại số tuyến tính. Trong phạm vi của luận văn tốt nghiệp thạc sĩ chuyên ngành phương pháp toán sơ cấp từ sự đề xuất hướng nghiên cứu và trực tiếp hướng dẫn của GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, chúng tôi xác định đề tài là “*Một số tính chất của ma trận và áp dụng vào đồ thị*”.

Với đề tài này, tôi hy vọng rằng sẽ làm rõ mối liên hệ giữa đại số tuyến tính và lý thuyết đồ thị dựa trên các biểu diễn ma trận của nó, từ đó tìm ra được ứng dụng. Kết quả của đề tài cũng là sự thể hiện quá trình tập dượt nghiên cứu của tôi.

Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu sự liên hệ giữa ma trận và đồ thị, phổ của đồ thị, từ đó góp phần làm rõ mối quan hệ giữa đại số tuyến tính với lý

thuyết đồ thị. Nhiệm vụ nghiên cứu được đặt ra trong khuôn khổ luận văn này là nghiên cứu lợi ích khi biểu diễn đồ thị dưới dạng ma trận, từ đó sử dụng các công cụ đại số nhằm tìm ra các ứng dụng thực tế của ma trận đồ thị. Đối tượng nghiên cứu của luận văn xoay quanh đồ thị hữu hạn và các biểu diễn của đồ thị dưới dạng ma trận là: ma trận kề, ma trận liên thuộc, ma trận có trọng số và ma trận Laplace (xem [1-2], [4-6]).

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, luận văn được chia làm 3 chương:

**Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.** Trong chương này, tôi trình bày cách xây dựng một đồ thị về ma trận đại số và khái niệm phổ của đồ thị.

**Chương 2. Tính chất của ma trận biểu diễn đồ thị và các phép toán đồ thị.** Trên cơ sở các loại ma trận của đồ thị hướng đến chứng minh định lý Kirrchhoff. Rõ ràng, việc tính số cây bao trùm của một đồ thị trực quan thường mất thời gian và dễ gây nhầm lẫn, thiếu sót nhưng với định lý Kirrchhoff từ công cụ đại số tác giả xây dựng nên cách tính số cây bao trùm của một đồ thị một cách chính xác và khoa học hơn bằng phần bù đại số của ma trận Laplace. Tiếp theo là các phép toán đồ thị để đếm số đồ thị con và xác định bậc chính quy và tính hai phần.

**Chương 3. Áp dụng một số tính chất của ma trận vào đồ thị.** Tác giả trình bày 3 ứng dụng sử dụng tính chất đã nêu ở chương hai. Ứng dụng đầu tiên sử dụng định lý kirrchhoff nhằm giải quyết bài toán xây dựng mạng lưới đường sắt tàu hỏa một cách kinh tế và tối ưu nhất. Ứng dụng thứ hai và thứ ba sử dụng tính chất phổ của đồ thị để đếm số đồ thị con và xác định bậc chính quy và tính hai phần.

# Chương 1

## Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở cho chương sau. Trước tiên là trình bày khái niệm đồ thị có hướng và đồ thị vô hướng, từ đó biểu diễn đồ thị dưới dạng ma trận và ý nghĩa. Mục đích chính của chương này nhằm giới thiệu một vài khái niệm cơ bản của lý thuyết đồ thị, đặc biệt là phổ của đồ thị. Kiến thức trong chương này sử dụng tài liệu [1], [2] và [4].

### 1.1 Khái niệm của đồ thị và phổ của đồ thị

#### 1.1.1 Khái niệm đồ thị

**Định nghĩa 1.1.1.** Một đồ thị vô hướng  $G$  là một cặp có thứ tự  $G = (V, E)$ , ở đây  $V$  là một tập hữu hạn; còn  $E$  là tập với các phần tử là các tập con hai phần tử trên  $V$ ,

$$E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}.$$

Các phần tử của  $V$  được gọi là các đỉnh, tập đỉnh của  $G$  được ký hiệu là  $V(G)$ . Các phần tử của  $E$  được gọi là các cạnh, tập cạnh của đồ thị vô hướng  $G$  được ký hiệu là  $E(G)$ . Nhưng để đơn giản hơn ta có thể viết “đỉnh  $v \in V$ ” hay “cạnh  $e \in E$ ”. Cho  $a, b \in V$ , nếu tồn tại  $e \in \{a, b\}$  thì khi đó  $e$  là một cạnh của  $G$  với hai đỉnh đầu mút là  $a, b$  hay  $a, b$  là hai đỉnh liên thuộc với  $e$ . Cạnh  $e = \{a, b\}$  thường được ký hiệu ngắn gọn là  $ab$  hay  $ba$ . Trong luận văn này, ta chỉ xét tới đơn đồ thị, không xét tới đồ thị có khuyên và đa đồ thị. Do vậy khi nhắc đến đồ thị, ta ngầm hiểu là đơn đồ thị vô hướng.

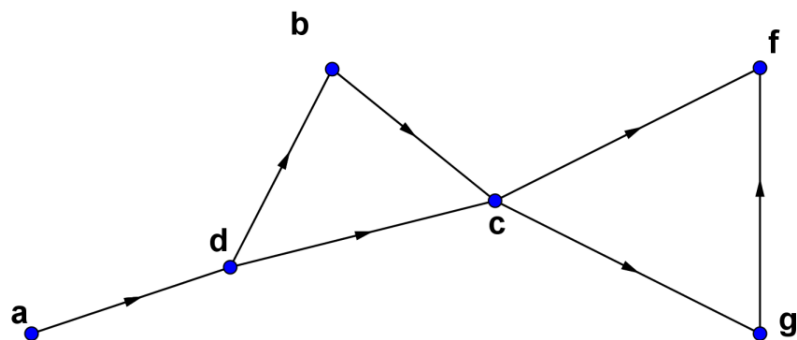
Có thể biểu diễn một đồ thị một cách trực quan như sau: Các đỉnh của  $V$  được biểu diễn bằng các vòng tròn nhỏ (rỗng hoặc đặc), còn các cạnh được



biểu diễn bằng một đường cong (đường thẳng) nối 2 đầu mút của cạnh.

**Ví dụ 1.1.2.** Cho  $G = (V, E)$  với  $V = \{a, b, c, d, f, g\}$ ;  $E = \{ad, db, dc, bc, cf, cg, gf\}$ .

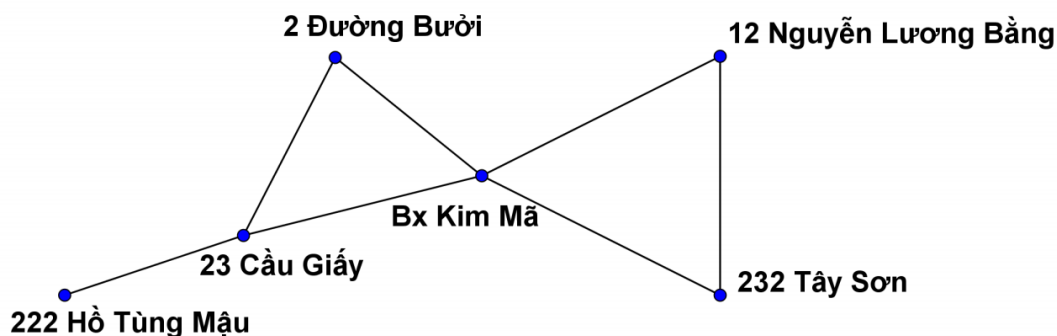
Khi đó biểu diễn của đồ thị vô hướng  $G$ :



Hình 1.1: Đồ thị  $G$

Giả sử một mạng lưới giao thông gồm các trạm xe bus và đường đi giữa chúng, giữa 2 trạm luôn chỉ có không quá một đường đi trực tiếp, không có đường quay vòng từ một trạm tới chính nó. Ta biểu diễn mạng lưới giao thông này bằng mô hình đồ thị như sau: mỗi trạm đỗ xe là một đỉnh, mỗi đường đi trực tiếp giữa hai trạm là 1 cạnh.

Ta có hình ảnh chính xác của đồ thị.



Hình 1.2: Mạng lưới xe bus

Các đường giao thông đôi khi chỉ được chạy theo một chiều. Chúng ta có thể dùng đồ thị có hướng để mô hình hóa những mạng như thế.

**Định nghĩa 1.1.3.** Một đồ thị có hướng  $G$  là một cặp có thứ tự  $G = (V, E)$ , ở đây  $V$  là một tập hữu hạn, còn  $E$  là một tập con của tích Đề các  $V \times V$ .

Các phần tử của  $V$  được gọi là các đỉnh, còn các phần tử của  $E$  được gọi là các cung của đồ thị vô hướng  $G$ . Nếu  $(a, b) \in E$  thì  $(a, b)$  được gọi là cung của  $G$  với đỉnh đầu là  $a$ , đỉnh cuối là  $b$  và có hướng từ  $a$  tới  $b$ . Khi đã cho  $G = (V, E)$  là đồ thị có hướng, cung  $(a, b) \in E$  thường được ký hiệu ngắn gọn là  $ab$  với  $a$  là đỉnh đầu và  $b$  là đỉnh cuối;  $b$  là cạnh với  $a$  là đỉnh đầu,  $a$  là đỉnh cuối.

Biểu diễn một đồ thị có hướng trên mặt phẳng trực quan tương tự như biểu diễn đồ thị vô hướng: Các đỉnh của  $V$  được biểu diễn bằng các vòng tròn nhỏ (rỗng hoặc đặc), còn các cung được biểu diễn bằng một đường cong có hướng (với mũi tên) từ đỉnh đầu tới đỉnh cuối.

**Định nghĩa 1.1.4.** Đồ thị có hướng hoặc vô hướng  $G = (V, E)$  được gọi là đồ thị có trọng số (hay thường gọi tắt là trọng đồ) nếu có ít nhất một trong hai hàm:

$$f : V \rightarrow W_V \quad \text{và} \quad g : E \rightarrow W_E$$

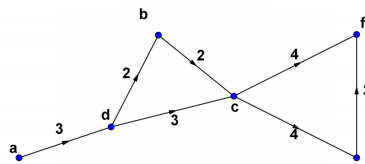
được xác định. Ở đây  $W_v$  và  $W_E$  là các tập số. Giá trị  $f(v)$  cho  $v \in V$  được gọi là trọng số của đỉnh  $v$ , còn giá trị  $g(e)$  cho  $e \in E$  được gọi là trọng số của cung hay cạnh  $e$ . Người ta cũng thường ký hiệu trọng đồ bằng  $G = (V, E, f)$  hay  $G = (V, E, f, g)$  tùy thuộc vào việc chỉ một hàm  $f$ , chỉ một hàm  $g$  hay cả hai hàm  $f$  và  $g$  được xác định.

Trong khuôn khổ luận văn này, chúng ta chỉ sử dụng tới  $G = (V, E, g)$ .

Biểu diễn một đồ thị  $G = (V, E, g)$  có trọng số trên mặt phẳng ta biểu diễn đồ thị có hướng và gắn giá trị trọng số tương ứng lên trực tiếp sát phía bên cạnh của cung mang giá trị đó.

**Ví dụ 1.1.5.** Cho đồ thị có hướng có trọng số với  $V = \{a, b, c, d, f, g\}$ ,  $E = \{ad, db, dc, bc, cf, cg, gf\}$ ,  $g(ad) = g(dc) = g(gf) = 3$ ,  $g(db) = g(bc) = 2$ ,  $g(cf) = g(cg) = 4$ .

Khi đó biểu diễn của đồ thị có trọng số  $G$ :



Hình 1.3: Đồ thị có trọng số  $G$